

Análise tridimensional elástica e linear de estacas carregadas horizontalmente

P. Varatojo^(*), P. Parreira^(**)

^(*) *Secção Autónoma de Geotecnia
Universidade Nova de Lisboa
Quinta da Torre - 2825 MONTE DE CAPARICA, PORTUGAL*

^(**) *Departamento de Engenharia Civil
Instituto Superior Técnico
Av. Rovisco Pais - 1096 LISBOA, PORTUGAL*

Sumário

Neste artigo apresentam-se e discutem-se resultados relativos a estacas e grupos de estacas sujeitas a carregamento horizontal obtidos com base numa formulação elástica e linear, por recurso a uma conjugação de modelos de elementos finitos e elementos de fronteira tridimensionais.

As soluções apresentadas incluem deslocamentos, tensões e esforços nas estacas e e tensões no terreno envolvente.

Quando possível, apresentam-se comparações com resultados publicados na bibliografia.

Abstract

Based on a 3D linear elastic formulation, which combines the boundary element and the finite element methods, solutions related to piles and groups of piles subjected to horizontal loading are presented and discussed.

The solutions include displacements, stresses and internal forces on piles and stresses in the ground.

Results are compared with others published in literature when possible.

1. INTRODUÇÃO

A utilização de modelos numéricos que de uma forma mais realista traduzam condições de obra em termos de geometrias, campos de deformação e de tensão em jogo

e de efeitos de interacção estaca/terreno e de interacção entre as próprias estacas, recorrendo a parâmetros que, apesar das dificuldades, podem ser avaliados através da realização de ensaios de laboratório e/ou "in situ", permite aumentar a fiabilidade das análises face às incertezas associadas à caracterização geotécnica.

No entanto, apesar de a caracterização geotécnica não ter acompanhado a evolução dos métodos de cálculo numérico, existem duas questões cuja importância também não pode ser minimizada e cujo efeito na resposta das estacas é significativo: (i) os materiais, em particular o terreno, apresenta comportamento não linear mesmo para uma baixa gama de tensões e (ii) o processo executivo altera o estado de tensão inicial e afecta as características de deformabilidade e resistência do terreno.

Estas duas questões não são abordadas neste trabalho, limitando-se os resultados apresentados a reologias elásticas e lineares para os materiais em causa e solicitações horizontais estáticas aplicadas na cabeça das estacas ao nível da superfície do terreno.

2. MODELO NUMÉRICO

O modelo desenvolvido permite a análise linear tridimensional de estacas isoladas ou em grupo, de cabeça livre ou com maciço de encabeçamento rígido, quando sujeitas a solicitações estáticas horizontais e/ou verticais. O terreno de fundação é modelado como um meio elástico homogéneo, prevendo-se, no entanto, a possibilidade de este ser constituído por diversos estratos horizontais de características diferentes.

O modelo numérico foi desenvolvido com base na conjugação dos métodos dos elementos finitos e de fronteira. Assim, a rigidez da estaca é modelada com base em elementos finitos unidimensionais de barra, com 6 graus de liberdade por nó, sendo as suas características mecânicas consideradas concentradas no seu eixo. Por sua vez, o solo é discretizado com base numa formulação de elementos de fronteira tridimensionais com 3 graus de liberdade por nó, desenvolvidos por aplicação da solução fundamental de Mindlin.

2.1 Formulação de elementos de fronteira

Como é sabido, a formulação de determinado problema físico pelo método dos elementos de fronteira passa pela discretização da equação integral (Brebbia et al., 1984)

$$c_{ij}(x) u_j(x) + \int_{\Gamma} t_{ij}^*(x,y) u_j(y) d\Gamma(y) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(x,y) t_j(y) d\Gamma(y) \quad (1)$$

onde $u_{ij}^*(x,y)$ e $t_{ij}^*(x,y)$ são definidos pela solução fundamental utilizada e fisicamente correspondem, respectivamente, ao deslocamento e tensão segundo a direcção j gerados no ponto de campo y por uma força unitária segundo i aplicada no ponto de carga x . Nesta equação, $u_i(x)$ e $t_i(x)$ representam ainda os campos de deslocamentos e de tensões aplicadas na fronteira a calcular.

Para obter uma solução numérica, as referidas distribuições de deslocamentos $u_i(x)$ e de tensões aplicadas $t_i(x)$ são discretizadas com base em funções de interpolação $\varphi(x)$ segundo

$$\begin{cases} u_i(x) = \sum \varphi(x) u_i \\ t_i(x) = \sum \varphi(x) t_i \end{cases} \quad (2)$$

onde u_i e t_i representam os valores nodais dos deslocamentos e das tensões aplicadas. Importa ainda referir que, como consequência da utilização da solução fundamental de Mindlin, apenas se torna necessário a discretização da superfície lateral e da ponta da estaca.

Se se introduzir a discretização (2) na equação integral (1), obtém-se o sistema de equações governativo

$$H_s u_s = G_s t_s \quad (3)$$

cujas soluções permitem calcular o valor das variáveis desconhecidas na fronteira. Note-se, que como cada nó está relacionado com todos os outros, as matrizes H e G obtidas são matrizes cheias e não simétricas.

Uma vez calculados os valores dos deslocamentos e das tensões nodais, as distribuições de deslocamentos e de tensões em qualquer ponto do domínio podem então ser obtidas com base na equação (1), (Jiang, 1991).

2.2 Formulação de elementos finitos

Como já foi dito, a estaca é modelada com base numa formulação de elementos finitos de barra, a qual, como é sabido, parte da equação de equilíbrio nodal

$$K_v u_v = f_v + N_v t_e \quad (4)$$

onde K_v e u_v são, respectivamente a matriz de rigidez e o vector dos deslocamentos nodais

referidos ao eixo da estaca, f_v o vector de forças aplicadas e t_e o vector das tensões geradas ao longo do fuste por interacção com o meio envolvente. Nesta equação, a matriz rectangular N_v é definida por

$$N_v = \int_{\Gamma} \varphi(x) \psi(x) d\Gamma(x) \quad (5)$$

onde $\varphi(x)$ representa as funções de interpolação utilizadas na secção anterior e $\psi(x)$ a projecção das funções de forma dos seis deslocamentos nodais de barra no fuste e na ponta da estaca.

Por forma a conjugar as equações (3) e (4), os seis deslocamentos u_v por nó do eixo da estaca podem ser relacionados com os três deslocamentos u_e por nó da superfície lateral e da base da estaca através da transformação

$$u_v = T u_e \quad (6)$$

a qual conduz à equação de equilíbrio

$$K_e u_e = f_e + N_e t_e \quad (7)$$

escrita em função dos deslocamentos u_e e onde

$$K_e = T^T K_v T \quad ; \quad f_e = T^T f_v \quad e \quad N_e = T^T N_v \quad (8)$$

2.3 Conjugação das duas formulações

A conjugação das equações governativas (3) e (7) é estabelecida através da imposição da compatibilidade e equilíbrio nodais ao longo da interface estaca/terreno, as quais obrigam a que

$$u_e = u_s \quad e \quad t_e + t_s = 0 \quad (9)$$

Se se definir agora as novas variáveis

$$u = u_e = u_s \quad e \quad t = t_s = -t_e \quad (10)$$

as relações atrás referidas conduzem ao sistema de equações final

$$\begin{bmatrix} K_e & N_e \\ H_s & -G_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_e \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Na Figura (1) representa-se esquematicamente o tipo de discretização necessária

para tratar a estaca isolada em meio homogéneo.

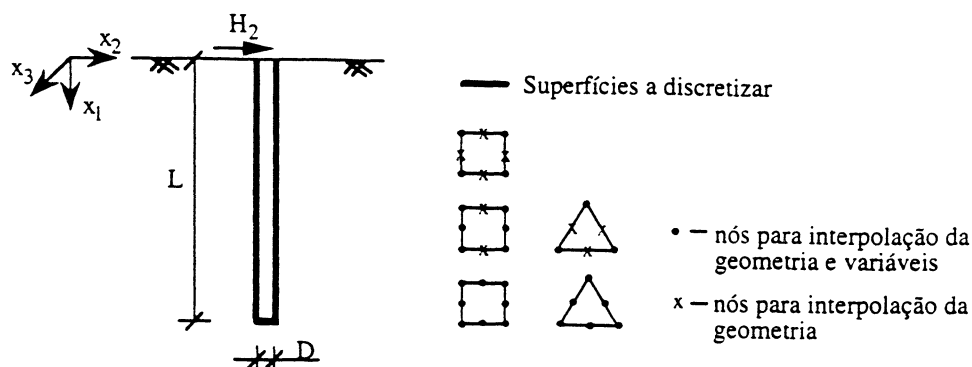


Fig. 1 - Discretização tipo para a estaca isolada em meio homogéneo

3. RESULTADOS NUMÉRICOS

Os casos apresentados referem-se a estacas circulares de secção transversal cheia com comprimento $L = 25\text{m}$, diâmetro $d = 1\text{m}$, terreno com coeficiente de Poisson $\gamma = 0.3$ e módulo de deformabilidade $E_s = 1\text{ MPa}$ sujeitas a carregamento horizontal $H_2 = 1\text{ kN}$. A rigidez relativa estaca/terreno corresponde à definição de Poulos (1973): $k_R = E_p I_p / E_s L^4$ em que E_p é o módulo de deformabilidade da estaca e I_p o seu momento de inércia (em meio com $E_s = N_h x_1$, $k_N = E_p I_p / N_h L^5$; Poulos e Davis, 1980).

Os resultados apresentados referem-se ainda a estacas discretizadas com 10 troços de comprimento variável ($5 \times 1\text{m}/2 \times 2.5\text{m}/3 \times 5\text{m}$) e elementos parabólicos isoparamétricos quadrangulares de 8 nós e triangulares de 6 nós (Varatojo e Parreira, 1993; Parreira e Varatojo, 1993).

3.1 Estaca isolada

Na Figura (2) compara-se a variação dos deslocamentos u_2 da cabeça da estaca isolada em meio homogéneo com outros resultados publicados e referentes a diferentes modelos numéricos.

Pode verificar-se que os valores correspondentes ao modelo numérico utilizado apresentam boa aderência com a generalidade dos outros modelos. No caso da estaca de cabeça livre, os resultados de Poulos (1971) e Banerjee e Davis (1978) são os que apresentam maiores discrepâncias, sendo os únicos modelos cuja formulação assenta no método dos elementos de fronteira (todos os restantes utilizam o método dos elementos

finitos).

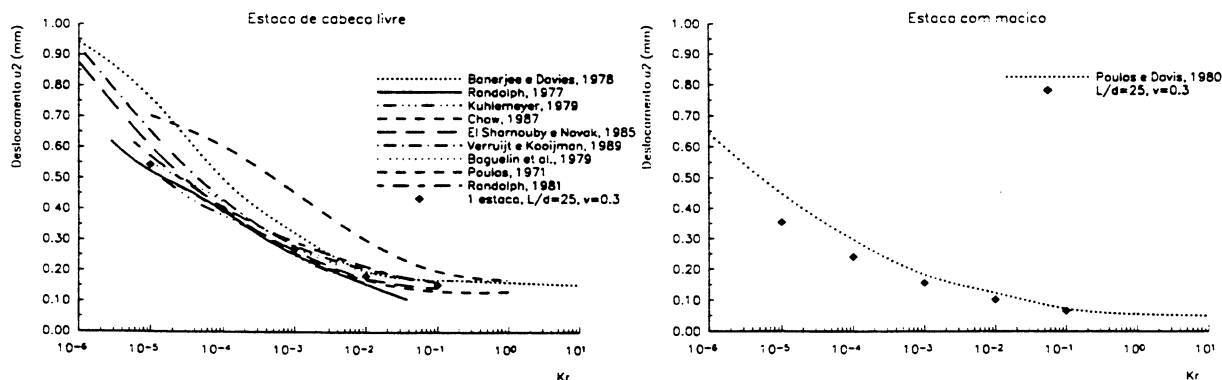


Fig. 2 - Variação dos deslocamentos u_2 em função da rigidez relativa k_R

A Figura (3) mostra a variação em profundidade dos deslocamentos u_2 e momentos flectores M_3 para valores de rigidez relativa estaca/terreno $k_R = 10^{-5}$, 10^{-3} e 10^{-1} em estacas de cabeça livre.

Pode verificar-se que existe uma boa concordância de resultados, à excepção da solução de Randolph (1981) para os momentos flectores no caso em que $k_R = 10^{-5}$.

A inexistência de uma solução fundamental para o caso em que o meio é não homogêneo, particularmente no caso de módulo de deformabilidade do terreno aumentando linearmente em profundidade (meio de Gibson) tem justificado o aparecimento de algumas formulações que, de uma forma aproximada, têm procurado ultrapassar o problema (Banerjee e Davis, 1978; Poulos e Davis, 1980).

A formulação adoptada faz uso do conceito de subregiões (Nakaguma, 1979; Venturini, 1983) e utiliza elementos infinitos de fronteira (Parreira e Almeida Pereira, 1993; Almeida Pereira e Parreira, 1994).

O conceito de subregiões permite considerar o meio constituído por regiões de diferentes características elásticas, podendo aplicar-se o método dos elementos de fronteira separadamente para cada região homogênea, independentemente das restantes. É assim possível constituir um conjunto de equações para todo o domínio em causa, através de condições de compatibilidade e de equilíbrio nas interfaces entre as várias subregiões.

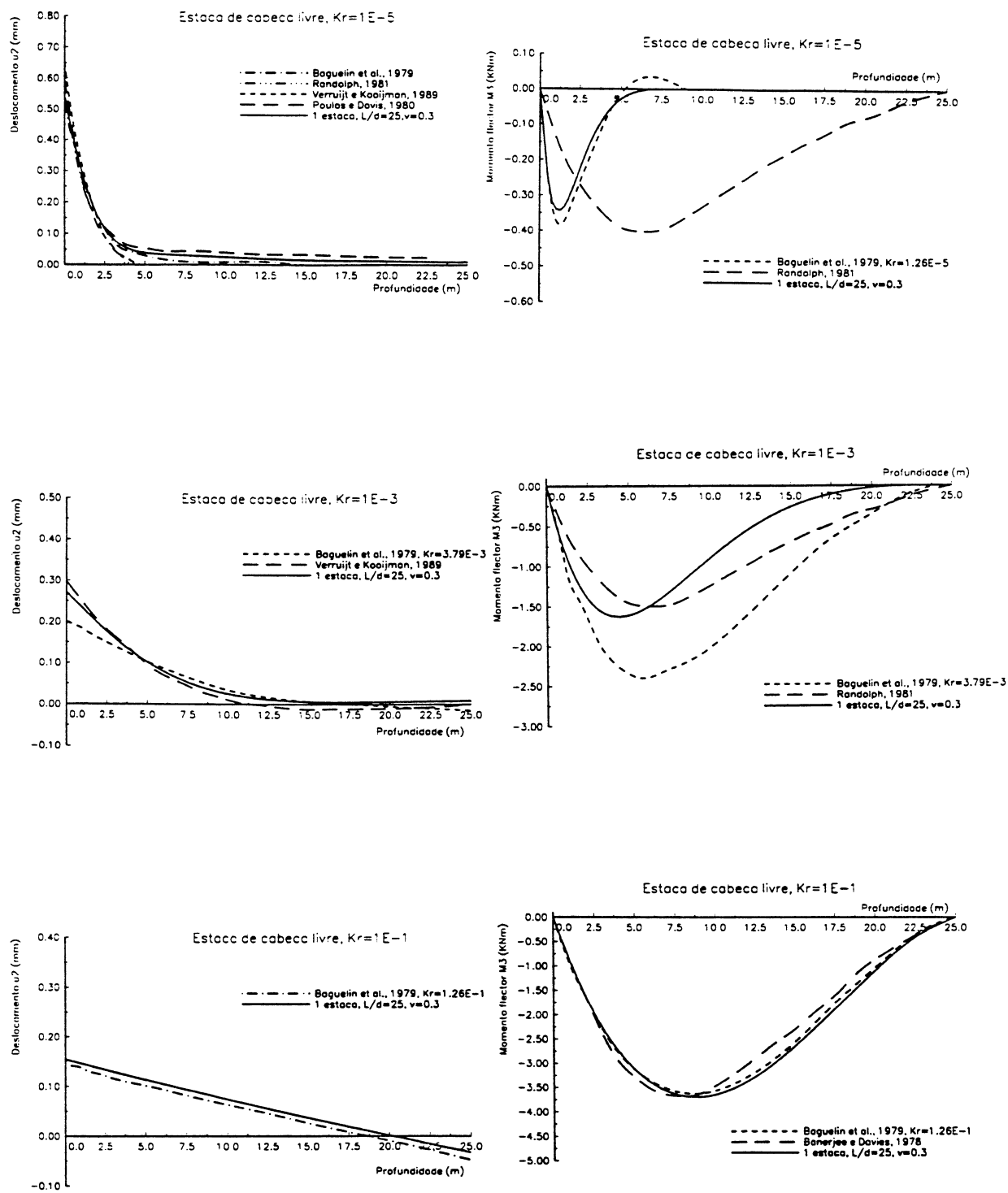


Fig. 3 - Variação dos deslocamentos u_2 e momentos flectores M_3 em função da profundidade

A utilização de elementos infinitos de fronteira permite neste caso ultrapassar a necessidade de estabelecer fronteiras laterais ao domínio semi-infinito e manter a grande vantagem de utilizar este tipo de método em que as condições no infinito são automaticamente satisfeitas, indicando-se na Figura (4) a discretização típica adoptada no caso de um terreno constituído por 3 estratos de diferentes características elásticas.

Como forma de confirmar a formulação utilizada, apresentam-se na Figura (5) resultados relativos à estaca isolada de cabeça livre com $k_R = 10^{-5}$, em meio homogéneo, mas tratada através da formulação de subregiões e com interfaces colocadas a diferentes profundidades. É possível verificar a coincidência das soluções obtidas.

A Figura (6) mostra a importância do cuidado a ter na discretização do fuste da estaca, em especial no que se refere aos primeiros 5 diâmetros e particularmente a importância da existência de interfaces nos primeiros 3 diâmetros, no caso em que $E_s = N_h \times_1$ com $E_s (L) = 1 \text{ MPa}$.

No Quadro (1) comparam-se resultados relativos a deslocamentos u_2 para as condições da figura anterior.

Quadro 1 - Deslocamentos u_2 na cabeça da estaca de cabeça livre em meio com $E_s = N_h \times_1$ e $E_s (L) = 1 \text{ MPa}$

AUTOR		DESLOCAMENTO u_2 (mm)
Banerjee e Davies, 1978		6.83
Poulos e Davis, 1980		9.27
Randolph, 1981		5.17
Interfaces:	5 m	3.42
	5/10 m	3.49
	3/5/10 m	4.56
	1/3/5/10 m	5.27
	1/2/3/4/5/10 m	5.46
	1/2/3/4/5 m	5.32

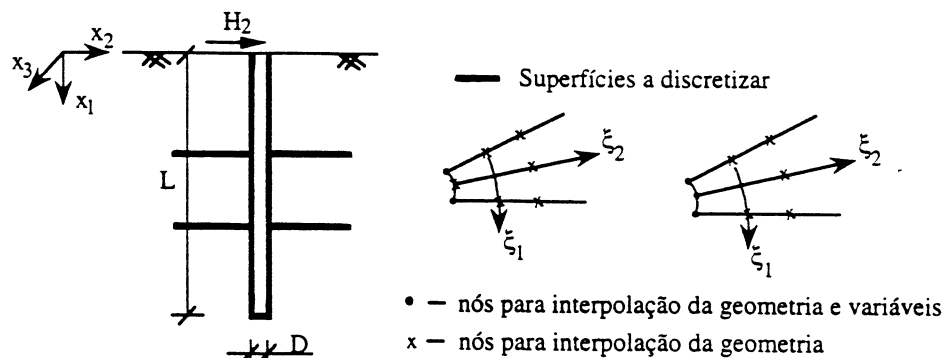


Fig. 4 - Discretização tipo para a estaca isolada em meio constituído por 3 estratos

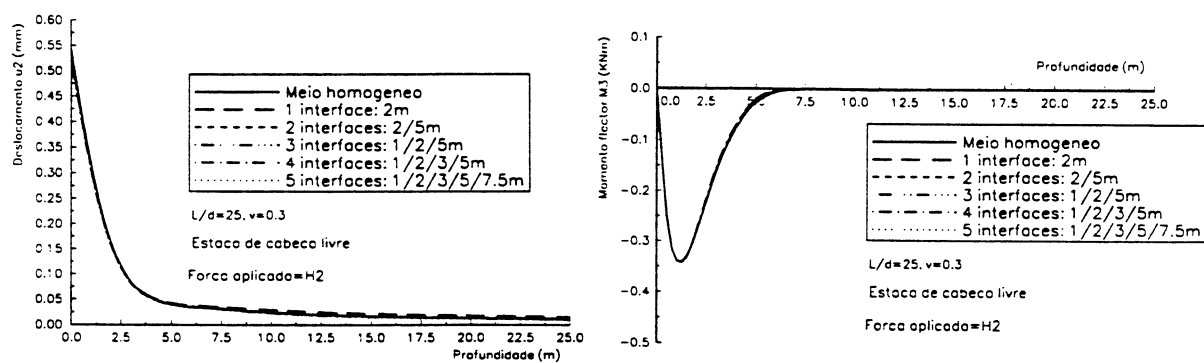


Fig. 5 - Meio homogêneo tratado através da formulação de subregiões

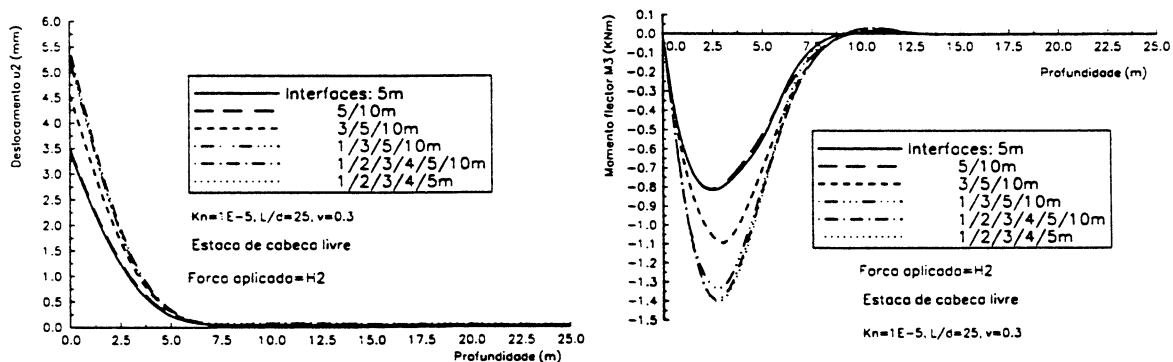


Fig. 6 - Meio não homogêneo com $E_1 = N_1 x_1$ e $E_2 (L) = 1 \text{ MPa}$

Verifica-se mais uma vez que as soluções de Banerjee e Davies (1978) e Poulos e Davis (1980) sobreestimam os deslocamentos, existindo boa concordância com os valores de Randolph (1981) relativamente às soluções do modelo utilizado que consideram interfaces nos primeiros 5 m.

3.2 Grupos de estacas

No caso do grupo de estacas com maciço de encabeçamento, este foi considerado como indeformável, sendo os deslocamentos e rotações da cabeça de todas as estacas compatibilizados à posteriori. O maciço de encabeçamento não existe directamente ao nível da discretização, mas o seu efeito é considerado artificialmente, sendo a compatibilização dos deslocamentos e rotações da cabeça de todas as estacas imposta à posteriori, por forma a garantir que todos os nós da superfície, após deformação, sejam complanares.

As soluções apresentadas na Figura (7) referem-se a meio homogéneo e estacas com uma relação espaçamento/diâmetro $s/d = 3$, situando-se a estaca analisada sobre o eixo x_2 , no canto superior esquerdo do maciço e sobre a origem dos eixos coordenados. O ângulo β representa a variação do ângulo definido pelo eixo x_2 e a linha que estabelece a maior dimensão do maciço de encabeçamento.

Os resultados da Figura estão de acordo com soluções expectáveis e mostram a importância da rigidez do grupo na resposta, em termos de deslocamentos e esforços.

3.3 Tensões no terreno

As soluções apresentadas referem-se a tensões σ_{22} ao longo de um alinhamento sobre o eixo 2, a 1 e 5 m de profundidade, e correspondem a valores referentes a pontos previamente seleccionados. De apontar que, tal como referido em 1, os resultados reportam a uma reologia elástica e linear para os materiais, pelo que não são admitidos efeitos de descolamento e/ou escorregamento entre as estacas e o terreno, ou mesmo, de cedência do solo.

A Figura (8) permite verificar a coincidência das soluções relativas a 2 e 4 estacas e o efeito redutor da profundidade nas tensões σ_{22} , da ordem dos 90% entre 1 e 5 metros de profundidade. Por outro lado, enquanto a existência ou não de maciço de encabeçamento pouco afecta o andamento dos diagramas, a variação da rigidez relativa de 10^{-5} para 10^{-3} é suficiente para inverter o sinal das tensões a 5 m de profundidade e para reduzir em cerca de 70% o seu valor máximo a 1 m de profundidade.

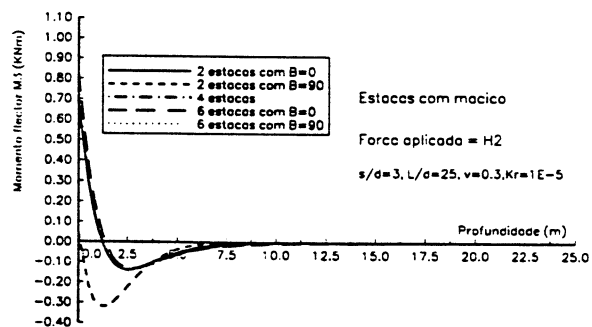
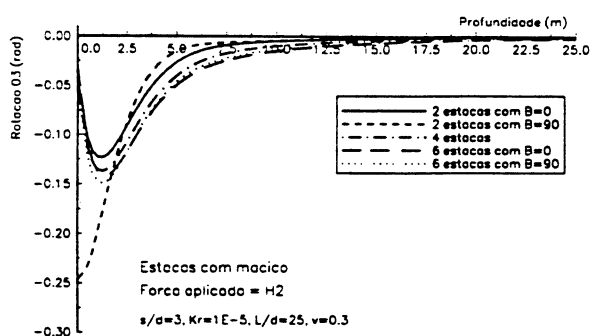
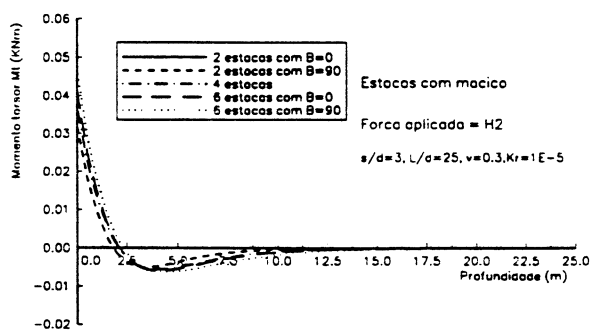
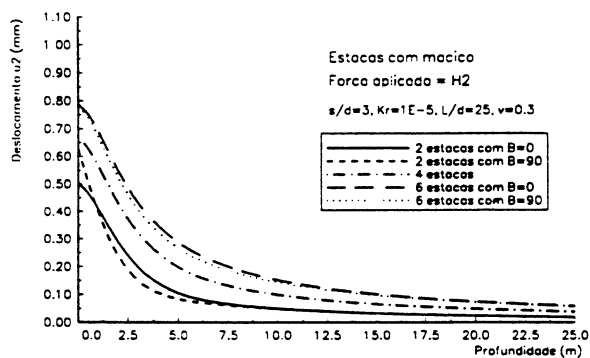
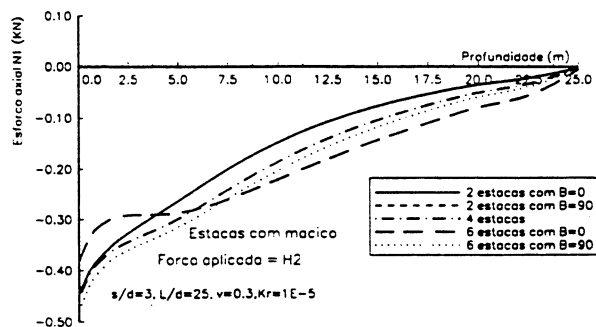
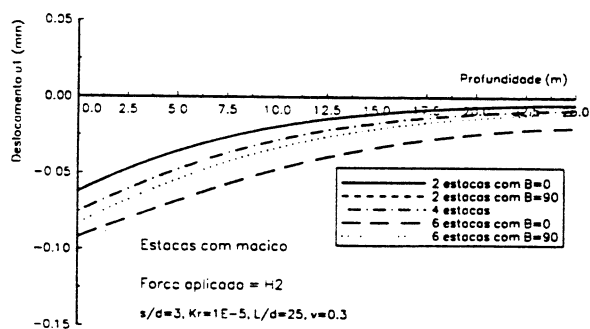


Fig. 7 - Soluções relativas a grupos de estacas com maciço de encabeçamento em meio homogêneo

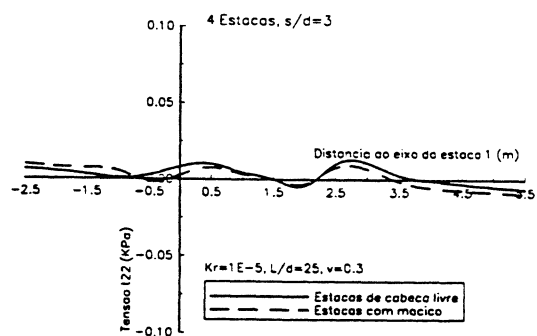
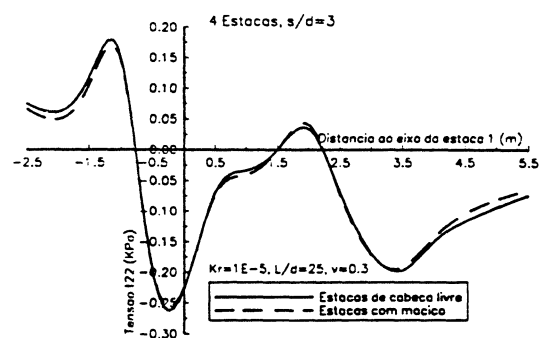
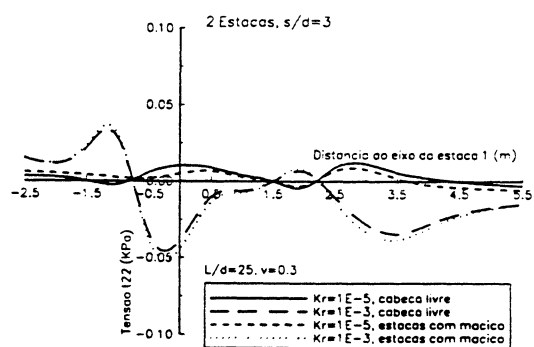
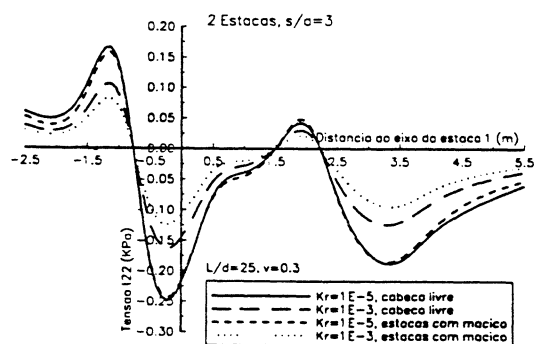
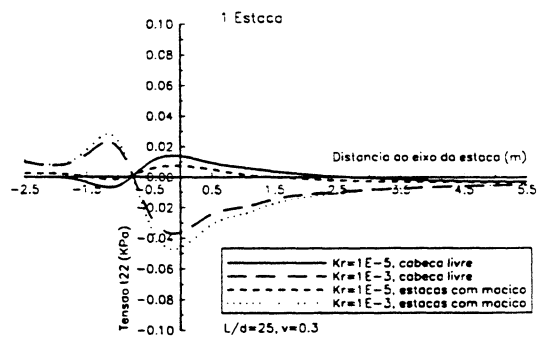
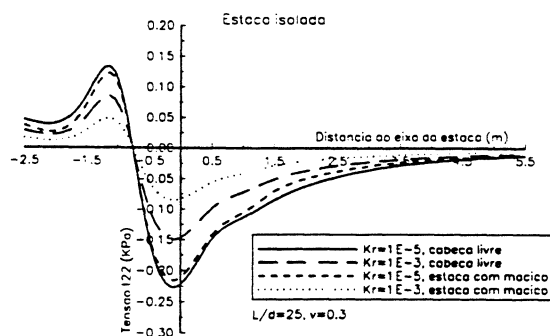


Fig. 8 - Tensões σ_{zz} a (a) 1 e (b) 5 m de profundidade em meio homogêneo

4. CONCLUSÕES

Os resultados apresentados permitem considerar a formulação numérica utilizada adequada ao tipo de problemas que se pretendem analisar, constituindo uma base devidamente consistente para posteriores análises correspondendo a reologias mais complexas.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Almeida Pereira, O.J.B.; Parreira, P. (1994) - Direct evaluation of Cauchy Principal Value integrals in boundary elements for infinite and semi-infinite three-dimensional domains, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 13, pp. 313-320.
- Baguelin, F.; Carayannacou-Trézos, S.; Frank, R. (1979) - Réaction latérale des pieux: effets de forme et effets tridimensionnelles, *Bull. Liaison Lab. P. et Ch.*, nº 104, pp. 33-47.
- Banerjee, P.K.; Davies, T.G. (1978) - The behaviour of axially and laterally loaded single piles embedded in nonhomogeneous soils, *Géotechnique*, Vol. 28, nº 3, pp. 309-326.
- Brebbia, C.A.; Telles, J.C.F.; Wrobel, L.C. (1984) - *Boundary Element Techniques: Theory and Applications in Engineering*, Springer-Verlag.
- Chow, Y.K. (1987) - Axial and lateral response of pile groups embedded in nonhomogeneous solids, *Int. J. Num. Meth. Geomech.*, Vol. 11, pp. 621-638.
- El Sharnouby, B.; Novak, M. (1985) - Static and low-frequency response of pile groups, *Can. Geotech. J.*, Vol. 22, nº 1, pp. 79-94.
- Jiang, Y.S. (1991) - Kernel functions of Mindlin's solution for evaluation of internal stresses, *Boundary Element Technology VI, Proc. 6th Int. Boundary Element Technology Conf.*, Southampton, ed.: C.A. Brebbia, pp. 227-238.
- Nakaguma, R.K. (1979) - Three dimensional elastostatics using the boundary element method, *Ph. D. thesis*, Univ. of Southampton.
- Parreira, P., Almeida Pereira, O.J.B. (1993) - Infinite boundary elements with direct evaluation of Cauchy Principal Value integrals, *15th Boundary Element Int. Conf.*, Worcester, Massachussets.

- Parreira, P.; Varatojo, P. (1993) - 3D Boundary element discretizations for linear elastic analysis of flexible and rigid piles, *Boundary Element Technology VIII*, pp. 217-228.
- Poulos, H.G. (1971) - Behaviour of laterally loaded piles: I - single piles, *J. Geotech. Engng. Div., ASCE*, Vol. 97, SM5, pp. 733-751.
- Poulos, H.G.; Davis, E.H. (1980) - *Pile foundation analysis and design*, John Wiley & Sons.
- Kuhlemeyer, R.L. (1979) - Static and dynamic laterally loaded floating piles, *J. Geotech. Engng. Div., ASCE*, Vol. 97, SM5, pp. 711-731.
- Randolph, M.F. (1981) - The response of flexible piles to lateral loading, *Géotechnique*, Vol. 31, n° 2, pp. 247-259.
- Varatojo, P.; Parreira, P. (1993) - Laterally loaded pile analysis using a 3D BEM formulation, in *Deep Foundations on Bored and Auger Piles*, ed.: W.F. Van Impe, pp. 323-326.
- Venturini, W.S. (1983) - *Boundary Element Method in Geomechanics*, ed.: C.A. Brebbia e S.A. Orszag, Springer-Verlag.
- Verruijt, A.; Kooijman, A.P. (1989) - Laterally loaded piles in a layered elastic medium, *Géotechnique*, Vol. 39, n° 1, pp. 39-46.