

UM MODELO DE ANÁLISE DINÂMICA DE MACIÇOS SUJEITOS A ACÇÕES DE TRÁFEGO: IMPLEMENTAÇÃO E VALIDAÇÃO

A MODEL TO PREDICT THE DYNAMIC RESPONSE OF SOIL MASSES UNDER TRAFFIC LOADS: IMPLEMENTATION AND VALIDATION

Alves Costa, Pedro, *FEUP, Porto, Portugal, pacosta@fe.up.pt*
Bodare, Anders, *KTH, Estocolmo, Suécia, bodare@byv.kth.se*
Calçada, Rui, *FEUP, Porto, Portugal, ruiabc@fe.up.pt*
Silva Cardoso, António, *FEUP, Porto, Portugal, scardoso@reit.up.pt*

RESUMO

No presente artigo apresenta-se um modelo semi-analítico para análise da resposta de maciços estratificados face a acções dinâmicas de carácter estacionário. O modelo tem carácter tridimensional, contempla a estratificação horizontal, característica de maciços sedimentares, e permite a consideração de cargas móveis. A formulação matemática do modelo baseia-se no Método dos Integrais Transformados (MIT), recorrendo por isso à aplicação de transformadas de Fourier tanto no domínio do espaço como no domínio do tempo. Este tipo de formulação permite a consideração de forma exacta das fronteiras físicas do domínio de análise, eliminando as dificuldades inerentes à sua truncagem e reflexão de ondas nas fronteiras artificiais. O trabalho apresentado é concluído com a comparação de alguns resultados obtidos pela metodologia descrita com soluções teóricas apresentadas por outros autores.

ABSTRACT

In the present paper a semi-analytical model for dynamic analyses of layered ground is presented. The model is three dimensional, comprises the horizontal layers of the ground and allows the consideration of moving loads. The mathematical formulation of the model is based on the Transformed Integral Method (ITM), using Fourier transforms over the space and the time domains. This formulation allows the exact consideration of the physical boundaries of the problem, eliminating the difficulties related with the use of artificial boundaries. The paper is concluded with the comparison between the results obtained by the proposed method and theoretical solutions presented by other authors.

1. INTRODUÇÃO

A construção de vias ferroviárias de alta velocidade a que se tem assistido nos últimos anos tem levantado diversas questões relativas ao comportamento dinâmico da via. Em termos gerais, e partindo de um princípio de sub-estruturação, o comportamento dinâmico é ditado pela interação de três subestruturas: o veículo, a via férrea e o maciço de fundação. O presente artigo dedica-se à apresentação de um modelo desenvolvido pelos autores para a análise do comportamento dinâmico do maciço de fundação quando submetido a acções dinâmicas de carácter estacionário, fixas no espaço ou móveis.

Ao longo dos últimos anos, têm surgido diferentes metodologias para análise de maciços submetidos a cargas móveis, podendo ser divididas em dois grandes grupos: i) métodos numéricos (elementos finitos e elementos de fronteira); ii) métodos semi-analíticos (método dos integrais transformados, MIT).

Os métodos numéricos ocupam grande destaque dada a sua versatilidade e facilidade de aplicação a geometrias arbitrárias (Adam et al. 2000; Hall 2003; Ju e Lin 2004). Como desvantagens podem ser apontadas a necessidade de truncagem do domínio e o tempo de computação muito elevado (Karlstrom e Bostrom 2006).

Uma outra forma de resolver o problema consiste em recorrer a métodos semi-analíticos, como o método dos integrais transformados (MIT). Nos últimos anos esta metodologia tem conhecido grandes avanços em termos de aplicabilidade, principalmente pelo baixo tempo de computação exigido e pela vantagem de permitir tratar problemas de carácter “infinito” de uma forma directa, sem exigir tratamentos especiais para as fronteiras artificiais (Grundmann et al. 1999; Picoux e Le Houédec 2005; Takemiya e Bian 2005). De destacar o desenvolvimento recente de modelos que permitem o acoplamento do MIT e do MEF, tirando vantagem dos dois métodos (Muller 2007).

No presente artigo é apresentado um modelo baseado no MIT para a simulação do comportamento dinâmico de maciços estratificados que foi implementado em MATLAB. Apresentam-se os resultados de alguns testes de validação e também um método para atender à interacção entre o maciço e a via férrea.

2. FORMULAÇÃO DO MIT

2.1. Resolução do problema elastodinâmico

O MIT baseia-se nas equações fundamentais (funções de Green) do problema elasto-dinâmico de um sólido. No modelo implementado optou-se pela abordagem através de funções flexibilidade em contraponto com a formulação de rigidez (ver Kausel e Roesset (1981) e Thomson (1950)).

Usando as funções de Green é possível definir, em qualquer instante temporal, o estado de tensão e deformação num ponto B, no interior de um maciço, quando solicitado por uma carga arbitrária, p, localizada num ponto A. De uma forma matricial,

$$\{u_B(x, y, z, t)\} = [Q(x, y, z, t)]_{3 \times 3} \{p_A(x, y, z, t)\} \quad (1)$$

$$\{\sigma_B(x, y, z, t)\} = [H(x, y, z, t)]_{6 \times 3} \{p_A(x, y, z, t)\} \quad (2)$$

Em que $\{u_B\}$ e $\{\sigma_B\}$ são os vectores de deslocamento e tensão do ponto B, respectivamente, é o vector de forças aplicadas no ponto A e $[Q]$ e $[H]$ são as matrizes de Green referentes a deslocamentos e tensões, respectivamente.

As matrizes de Green são obtidas através das equações fundamentais da elastodinâmica (equações diferenciais de Lamé), que para um maciço homogéneo são dadas por:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial x_k} + \mu \nabla^2 u_k = \rho \ddot{u}_k \quad k = 1, 2, 3 \quad (3)$$

$$\Delta = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_k}$$

em que: λ e μ são as constantes de Lamé e ρ a massa volúmica.

De modo a considerar o amortecimento do material, as constantes de Lamé, λ e μ , são introduzidas como entidades complexas.

No caso de um maciço estratificado, como o representado na Figura 1, para além das equações de equilíbrio que têm de ser respeitadas em qualquer ponto do meio (atendendo às propriedades do estrato a que o ponto pertence), introduzem-se ainda condições de equilíbrio de tensões e de compatibilidade de deformações nas fronteiras entre cada dois estratos.

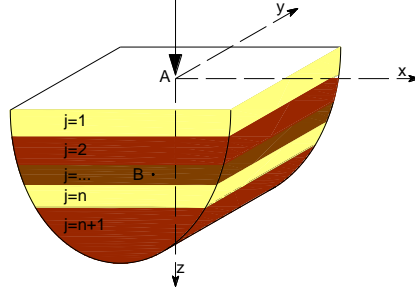


Figura 1 – Maciço estratificado

A resolução do sistema de equações apresentado pode ser efectuada recorrendo a técnicas numéricas, tais como o método dos elementos finitos ou dos elementos de contorno. Outro modo de encontrar solução para o sistema de equações diferenciais parciais é através do MIT, o qual permite transformar todas as equações em equações diferenciais ordinárias. Para tal, recorre-se à aplicação de transformadas de Fourier relativas às variáveis espaciais x ($x \rightarrow k_1$) e y ($y \rightarrow k_2$) e à variável temporal t ($t \rightarrow \omega$), tal como indicado:

$$\tilde{f}(k_1, k_2, z, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y, z, t) e^{-i(k_1 x + k_2 y + \omega t)} dx dy dt \quad (4)$$

De acordo com a expressão 4, apenas a variável z , permanece no domínio espacial. As imagens de Fourier de x e y serão designadas por números de onda e a imagem de Fourier de t por frequência.

Tirando partido das propriedades de derivação das funções transformadas, a resolução do sistema de equações de Lamé é bastante simples. No entanto para a aplicação do MIT é ainda necessário impor que os estratos que constituem o maciço sejam horizontais, tal com representado na Figura 1.

Os deslocamentos e as tensões que actuam no plano de fronteira de um estrato j podem ser agrupadas num único vector, $\{S\}_j$. Considerando a fronteira superior e a fronteira inferior de cada estrato, tem-se:

$$\{\tilde{S}(k_1, k_2, 0, \omega)\}_j^{\text{sup.}} = \left\{ \begin{array}{l} \{\tilde{u}(k_1, k_2, 0, \omega)\}_j^{\text{sup.}} \\ \{\tilde{\sigma}(k_1, k_2, 0, \omega)\}_j^{\text{sup.}} \end{array} \right\}; \quad \{\tilde{S}(k_1, k_2, h, \omega)\}_j^{\text{inf.}} = \left\{ \begin{array}{l} \{\tilde{u}(k_1, k_2, h, \omega)\}_j^{\text{inf.}} \\ \{\tilde{\sigma}(k_1, k_2, h, \omega)\}_j^{\text{inf.}} \end{array} \right\} \quad (5)$$

Os termos dos vectores $\{S\}_j$ são determinados através da resolução das equações de Lamé no domínio transformado, sendo dados por:

$$\{\tilde{S}\}_j^{\text{sup.}} = [A]_j^{\text{sup.}} \{b\}_j \quad (6)$$

$$\{\tilde{S}\}_j^{\text{inf.}} = e^{\beta_{1,j} h_j} [A]_j^{\text{inf.}} \{b\}_j \quad (7)$$

$$\beta_{1,j} = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 - \left(\frac{\omega}{c_{p,j}}\right)^2} \quad (8)$$

em que $\{b\}$ é o vector cujos termos são constantes de integração e $c_{p,j}$ é a velocidade de propagação das ondas P no estrato j .

Recorrendo à formulação proposta por Thomson (1950) e Haskell (1953), os vectores $\{S\}^{\text{sup}}$ e $\{S\}^{\text{inf}}$ podem ser relacionados pela expressão:

$$\{\tilde{S}\}_j^b = e^{\beta_{1,j} h_j} [A]_j^b ([A]_j^t)^{-1} \{\tilde{S}\}_j^t \quad (9)$$

Tendo em conta o equilíbrio de tensões e compatibilidade de deformações na interface entre dois estratos consecutivos,

$$\{\tilde{S}\}_j^{\text{inf}} = \{\tilde{S}\}_{j+1}^{\text{sup}} \quad (10)$$

Aplicando o procedimento matemático descrito a cada estrato e impondo as condições de fronteira do problema, é possível chegar às seguintes relações:

$$\{\tilde{u}_B(k_1, k_2, z, \omega)\} = [\tilde{Q}(k_1, k_2, z, \omega)]_{3 \times 3} \{\tilde{p}_A(k_1, k_2, z, \omega)\} \quad (11)$$

$$\{\tilde{\sigma}_B(k_1, k_2, z, \omega)\} = [\tilde{H}(k_1, k_2, z, \omega)]_{6 \times 3} \{\tilde{p}_A(k_1, k_2, z, \omega)\} \quad (12)$$

Por uma questão de espaço a formulação matemática de $[Q]$ e $[H]$ não é apresentada, sendo o leitor remetido para Sheng et al. (1999) e Alves Costa (2007).

Os deslocamentos e tensões no ponto B podem ser obtidos no domínio do espaço e do tempo através da aplicação de transformadas inversas de Fourier.

Na Figura 2 ilustram-se os passos essenciais do MIT.

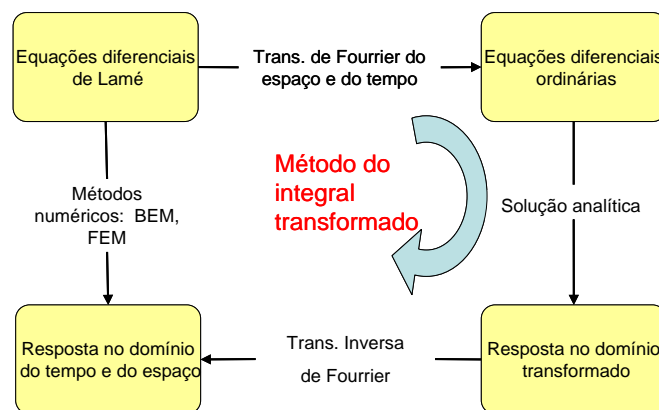


Figura 2 – Resolução do problema elastodinâmico pelo MIT

2.2. Extensão do problema a cargas móveis

No ponto anterior foi apresentado o MIT partindo do princípio que a fonte de excitação se encontrava numa localização fixa. Tirando partido das propriedades das transformadas de Fourier, a extensão a problemas de cargas móveis pode ser efectuada com grande simplicidade.

Considere-se então uma carga que se movimenta na direcção x , com velocidade c , e que apresenta amplitude variável ao longo do tempo:

$$p(x, y, z, t) = p_x(x - ct) \cdot p_y(y) \cdot p_z(z) \cdot p_t(t) \quad (13)$$

Transformando a variável espacial x para o domínio do número de onda,

$$p(k_1, y, z, t) = \tilde{p}_x(k_1) \cdot e^{-ik_1 ct} \cdot p_y(y) \cdot p_z(z) \cdot p_t(t) \quad (14)$$

e aplicando agora transformadas de Fourier relativas à variável espacial y e temporal t a expressão 14 reduz-se a,

$$\tilde{p}(k_1, k_2, z, \omega) = \tilde{p}_x(k_1) \cdot \tilde{p}_y(k_2) \cdot p_z(z) \cdot \tilde{p}_t(\omega - k_1 c) \quad (15)$$

3. EXEMPLOS DE VALIDAÇÃO

Com o objectivo de validar o modelo apresentado foram simulados alguns problemas e os resultados obtidos comparados com os resultados apresentados na bibliografia por outros autores.

O primeiro exemplo refere-se a uma carga pontual que se desloca à velocidade de 700 m/s à superfície de um maciço semi-indefinido. As propriedades do maciço apresentam-se na Figura 3a. Nas Figuras 3b e 3c são apresentados os deslocamentos adimensionalizados ($D^* = \mu z D$) ao longo do tempo adimensionalizado ($t^* = t c_s / z$) num ponto B ($x=0; y=0; z=10$). Confrontando os resultados obtidos através do modelo proposto com a solução apresentada por Barros e Luco (1994), consta-se que são praticamente coincidentes, o que permite observar a acuidade do modelo desenvolvido.

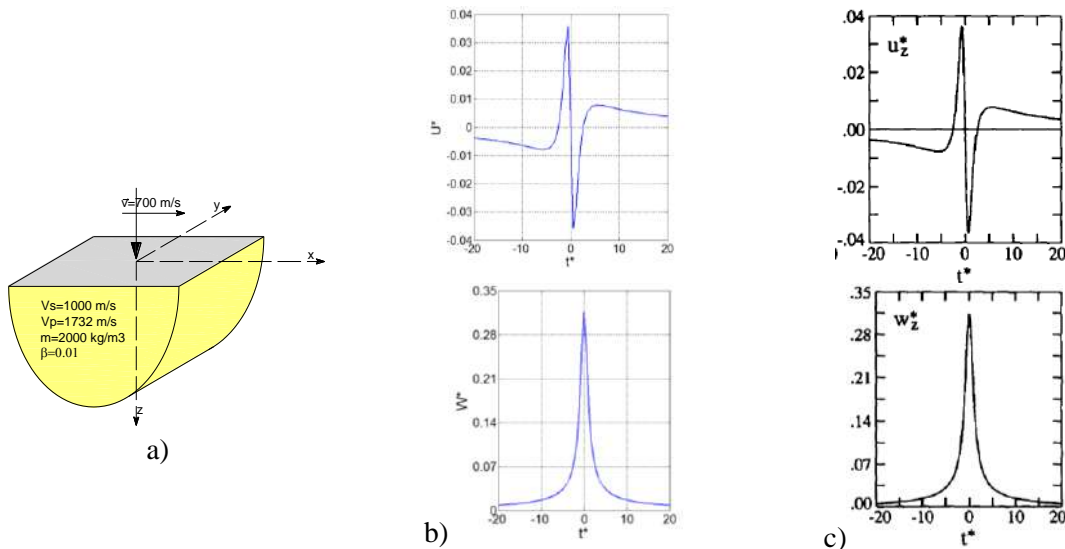


Figura 3 – Deslocamentos induzidos no ponto de observação por uma carga pontual móvel: a) descrição do problema; b) presente trabalho; c) Barros e Luco (1994).

Por último, com o intuito de avaliar as capacidades do modelo quando a velocidade da carga se encontra em regime super-sónico e o maciço apresenta estratificação, recorreu-se a um outro exemplo apresentado por Barros e Luco (1994). Neste exemplo, o maciço consiste em cinco

estratos com possança de 4 metros cada, sobrejacentes a um meio semi-indefinido. Por ordem crescente em profundidade, os estratos apresentam as seguintes velocidades de propagação das ondas S: 200 m/s; 475 m/s; 675 m/s; 825 m/s; 925 m/s e 1000 m/s. O coeficiente de Poisson e a massa volúmica foram admitidos iguais para todos os estratos, tomando os valores de 0,25 e 2000 kg/m³, respectivamente. Na Figura 4 apresentam-se os deslocamentos horizontais e verticais no ponto de observação B com coordenadas (x=0;y=0;z=10). Como se pode observar, os resultados obtidos são muito próximos dos apresentados por Barros e Luco (1994).

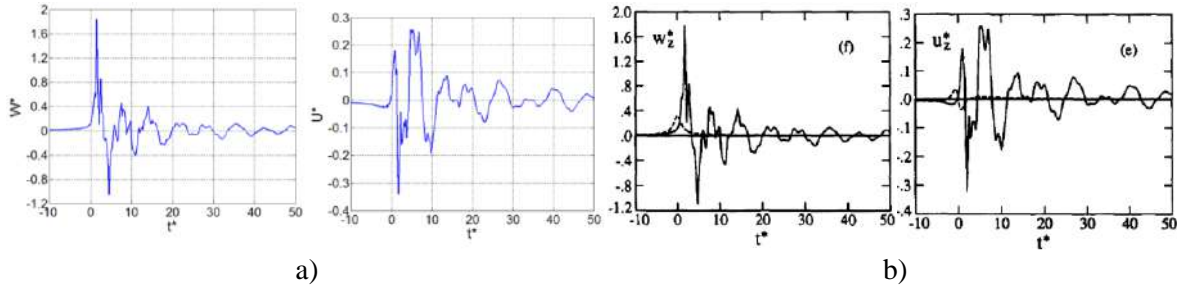


Figura 4 – Deslocamentos induzidos no ponto de observação por uma carga pontual móvel à superfície de um maciço estratificado: a) presente trabalho; b) Barros e Luco (1994).

4. INTERACÇÃO VIA-MACIÇO

Nos últimos anos têm surgido diversas propostas para a simulação da via férrea. A título de exemplo referem-se os modelos propostos por Esveld (2001) e Lombaert et al. (2006). Os modelos existentes distinguem-se pela forma como são considerados os componentes da super-estrutura ferroviária. Na grande maioria dos modelos, os componentes da via são simulados através de elementos de viga, amortecedores, molas e outras formas estruturais relativamente simples.

Embora o modelo implementado possua diferentes potencialidades para a simulação da via férrea, para a presente discussão será utilizado um modelo simples, em que todos os elementos da super-estrutura são considerados através da inércia de flexão e massa de uma viga de Bernoulli-Euler apoiada no maciço de fundação, tal como se apresenta na Figura 5.

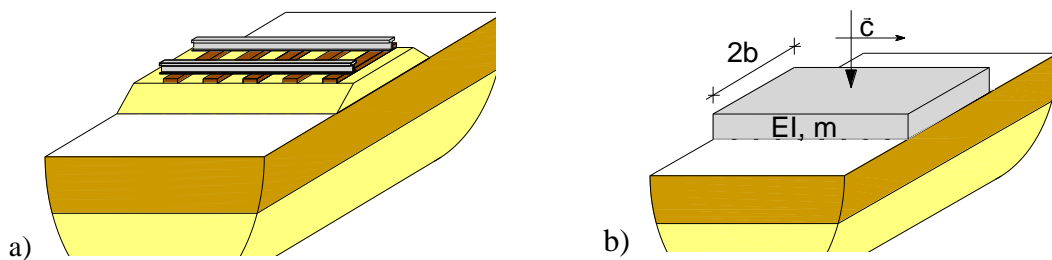


Figura 5 – Modelação da via férrea: a) estrutura real; b) modelo adoptado.

Considerando apenas interação entre o maciço e a via na direcção vertical, o equilíbrio da via é dado por:

$$EI \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} + m \ddot{u}(x,t) = P(x-ct) - F_g(x,t) \quad (16)$$

em que: EI é a rigidez de flexão da via por unidade de comprimento; m, a massa da via por unidade de comprimento; P a acção aplicada e F_g a reacção do maciço de fundação.

Aplicando transformadas de Fourier em relação ao espaço e ao tempo, a resposta da via é dada por:

$$\tilde{u}(k_1, \bar{\omega}) = \frac{\tilde{P}(k_1, \bar{\omega})}{EI k_1^4 - m \bar{\omega}^2 + \tilde{K}_{eq}(k_1, \bar{\omega})} = \tilde{H}_T(k_1, \bar{\omega}) \cdot \tilde{P}(k_1, \bar{\omega}) \quad (17)$$

Sendo que $K(k_1, \omega)$ é a impedância do maciço de fundação. A impedância do maciço de fundação é determinada pelo modelo para o maciço anteriormente apresentado, impondo a compatibilidade de deslocamento vertical no centro da via e admitindo uma distribuição uniforme de tensões ao longo da largura da via. Considerando $2b$ a largura da via, a ação aplicada por esta ao maciço de fundação é dada por:

$$p(x, t) = [0, 0, p_{zz}(x, t)]^T; \quad p_{zz} = \begin{cases} \frac{F_g}{2b} \llcorner & |y| \leq b \\ 0 \llcorner & |y| > b \end{cases} \quad (18)$$

Aplicando transformadas de Fourier à ação:

$$\tilde{p}(k_1, \omega) = [0, 0, F_g \frac{\text{sen}(k_2 b)}{k_2 b}]^T \quad (19)$$

e tendo em conta a compatibilidade de deslocamento entre o centro da via e o maciço de fundação, a impedância do último é dada por:

$$\tilde{K}_{eq}(k_1, \omega) = - \frac{2\pi}{\int_{-\infty}^{+\infty} Q_{33}(k_1, k_2, \omega) \frac{\text{sen}(k_2 b)}{k_2 b} dk_2} \quad (20)$$

Determinadas as forças de interação entre a via e o maciço de fundação, as duas subestruturas via e maciço podem ser analisadas de uma forma independente ou seja, para além de ser possível obter a resposta da via férrea, é também possível conhecer os deslocamentos e tensões em qualquer ponto do maciço de fundação através da construção das funções de Green anteriormente referidas.

5. CONCLUSÕES

No presente artigo é apresentado um modelo de análise da resposta dinâmica de maciços submetidos a ações dinâmicas de carácter estacionário baseado no MIT. Para além da formulação matemática do modelo é apresentada uma extensão a problemas de cargas móveis e são apresentados alguns exemplos de validação que permitem verificar a boa acuidade do modelo.

Por último, explana-se uma formulação para atender à interacção via-maciço através de princípios de subestruturação. Usando esta formulação em Alves Costa et al. (2008) faz-se uma aplicação a um caso de estudo.

O modelo proposto necessita de pouco tempo de computação e de preparação de dados, mostrando-se uma ferramenta muito útil e versátil para a análise de fenómenos dinâmicos induzidos pelo tráfego ferroviário ou rodoviário.

AGRADECIMENTOS

O primeiro autor agradece à Fundação Calouste Gulbenkian o apoio financeiro para a realização de um estágio de 6 meses no Royal Institute of Technology, em Estocolmo, Suécia.

Este artigo refere investigação realizada com o apoio financeiro da "FCT - Fundação para a Ciência e a Tecnologia", Portugal.

REFERÊNCIAS

- Adam, M., G. Pflanz e G. Schmid (2000). "Two- and three-dimensional modelling of half-space and train-track embankment under dynamic loading." *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* **19**: 559-573.
- Alves Costa, P. (2007). A semi-analytical model to predict the dynamic railway behaviour. Porto/Stockholm, KTH/FEUP.
- Alves Costa, P., A. Bodare, R. Calçada e A. Silva Cardoso (2008). Um modelo de análise dinâmica de maciços sujeitos a acções de tráfego: Validação experimental. 11º Congresso Nacional de Geotecnia, Coimbra.
- Barros, F. e J. Luco (1994). "Response of a layered viscoelastic half-space to a moving point load." *Wave motion* **19**: 189-210.
- Esveld, C. (2001). Modern Railway Tracks. Delft, MRT-Productions.
- Grundmann, H., M. Lieb e E. Trommer (1999). "The response of a layered half-space to traffic loads moving along its surface " *Archive of Applied Mechanics* **69**: 55-67.
- Hall, L. (2003). "Simulations and analyses of train-induced ground vibrations in finite element models." *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* **23**: 403-413.
- Haskell, N. (1953). "The dispersion of surface waves on multilayered medium." *Bulletin of the Seismological Society of America* **73**: 17-43.
- Ju, S. e H. Lin (2004). "Analysis of train-induced vibrations and vibration reduction schemes above and below critical Rayleigh speeds by finite element method." *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* **24**: 993-1002.
- Karlstrom, A. e B. Bostrom (2006). "An analytical model for train-induced ground vibrations from trains." *Journal of Sound and Vibration* **292**: 221-241.
- Kausel, E. e J. Roesset (1981). "Stiffness matrices for layered soils." *Bulletin of the Seismological Society of America* **71**(6): 1743-1761.
- Lombaert, G., G. DeGrande, J. Kogut e S. François (2006). "The experimental validation of a numerical model for the prediction of railway induced vibrations." *Journal of Sound and Vibration* **297**: 512-535.
- Muller, K. (2007). Dreidimensionale dynamische Tunnel-Halbraum-Interaktion. Lehrstuhl für Baumechanik. München, Technischen Universität München. **PhD**.
- Picoux, B. e D. Le Houédec (2005). "Diagnosis and prediction of vibration from railway trains." *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* **25**: 905-921.
- Sheng, X., C. Jones e M. Petyt (1999). "Ground vibration generated by a harmonic load acting on a railway track." *Journal of Sound and Vibration* **225**: 3-28.
- Takemiya, H. e X. Bian (2005). "Substructure Simulation of Inhomogeneous Track and Layered Ground Dynamic Interaction under Train Passage." *Journal of Engineering Mechanics* **131**(7): 699-711.
- Thomson, W. (1950). "Transmission of elastic waves through a stratified solid medium." *Journal of Applied Physics* **21**: 89-93.